INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ȘI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema1. Se consideră numerele reale strict pozitive a,b,c,d astfel încât $a<b<c<d$ şi $a+d=b+c$.Demonstraţi că:

a) $\sqrt{ad}<\sqrt{bc}$;

b) $\sqrt{a}+\sqrt{d}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem echivalenţele $\sqrt{ad}<\sqrt{bc}$ dacă şi numai dacă $ad<bc$	**1p**
sau $ad-ac<bc-ac$.	**2p**
Obţinem $a(d-c)<c(b-a)$ echivalent cu $a<c$, ceea ce este adevărat.	**2p**
b) Prin ridicare la pătrat în ambii membri ai inegalităţii, obţinem inegalitatea echivalentă $a+d+2\sqrt{ad}<b+c+2\sqrt{bc}$.	**3p**
Cum $a+d=b+c$, ţinând seamă de **a)**, obţinem concluzia.	**2p**

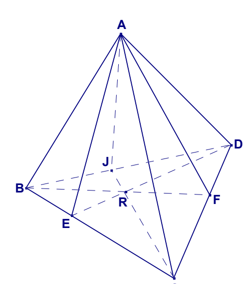
Problema 2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu muchiile opuse perpendiculare. Fie $AE\perp BC$, $E\in BC$, $AF\perp CD$, $F\in CD$. Fie $BF\cap DE=\{R\}$ şi $CR\cap BD=\{J\}$.

a) Demonstraţi că $DE\perp BC$;

b) Demonstraţi că $AJ\perp BD$.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Din ipoteză obţinem $BC\perp(AED)$, deci $BC\perp DE$.	**4p**
b) Analog $CD\perp BF$, deci R este ortocentrul triunghiului BCD.	**3p**
Atunci $CR\perp BD$, $BD\perp(ACR)$ şi concluzia.	**3p**



Problema 3. a) Arătaţi că, pentru orice numere reale $x, y > 0$, este adevărată inegalitatea :
$\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} \leq 1$;

b) Demonstraţi că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea : $\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{abc}$.

Gazeta Matematică nr.12/ 2011

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Prin reducere la absurd , presupunem că $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} > 1$ (*) .	**1p**
Cum $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, deducem $\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$.	**2p**
Astfel, din (*) , ajungem la : $\frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{xy} > 1$, fals.	**2p**
b) Folosind punctul **a)** şi ipoteza, ajungem la : $\frac{1+c}{a+b} = \frac{1+1-a-b}{a+b} = \frac{2}{a+b} - 1 \leq \frac{1}{ab}$.	**2p**
Analog, obţinem $\frac{1+b}{c+a} \leq \frac{1}{ac}$ şi $\frac{1+a}{b+c} \leq \frac{1}{bc}$.	**1p**
Însumând ultimele trei relaţii, obţinem $\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{abc}$.	**2p**

Problema 4. Un patrulater convex are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât lungimea fiecărei laturi să reprezinte un divizor al sumei lungimilor celorlalte trei laturi. Demonstraţi că printre laturile patrulaterului există două care au aceeaşi lungime.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Presupunem laturile de dimensiuni diferite a, b, c, d astfel încât $a < b < c < d$.	**1p**
Atunci $d < a+b+c < 3d$.	**1p**
Cum $a+b+c$ se divide cu d deducem că $a+b+c = 2d$,	**1p**
Rezultă $a+b+c+d = 3d$	**2p**
Prin urmare, fiecare dintre numerele a, b, c divide suma $a+b+c+d$, adică divide pe $3d$.	**1p**
Fie $x = \frac{3d}{a}$, $y = \frac{3d}{b}$ şi $z = \frac{3d}{c}$. Din $a < b < c$, rezultă $x > y > z > 3$.	**1p**
Deci $z \geq 4$, $y \geq 5$ şi $x \geq 6$.	**1p**
Atunci $2d = a+b+c = \frac{3d}{x} + \frac{3d}{y} + \frac{3d}{z} \leq \frac{3d}{6} + \frac{3d}{5} + \frac{3d}{4} = \frac{111d}{60} < 2d$, fals. Rezultă concluzia.	**2p**